

Μάθημα: **Στατική ΙΙ**  
 Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

30 Ιουνίου 2011  
 Διάρκεια εξέτασης 2:15

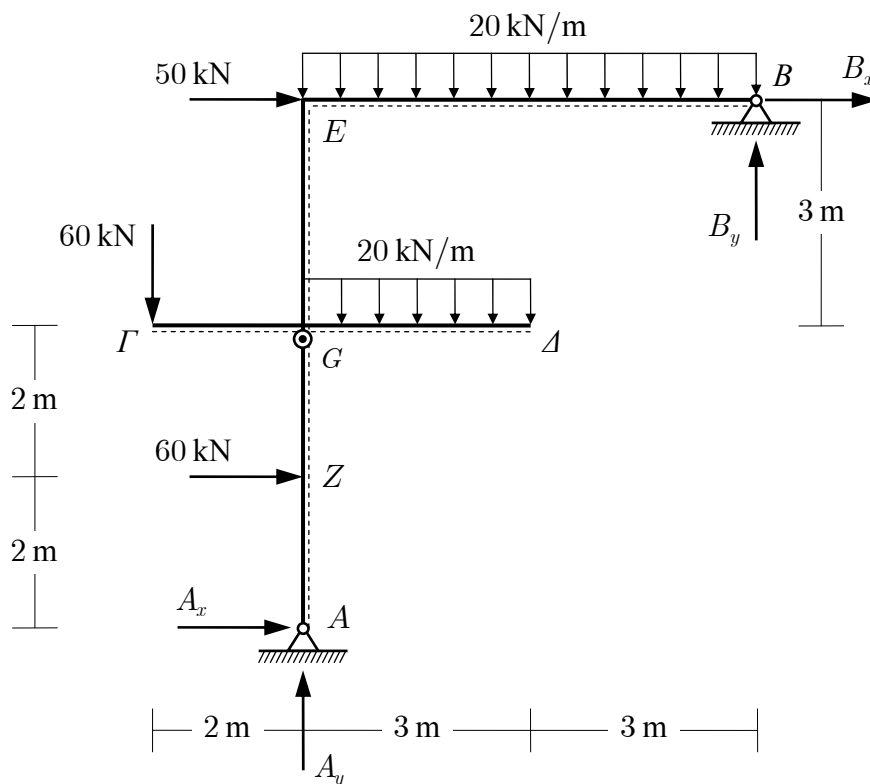
## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

(1<sup>η</sup> περίοδος εαρινού εξαμήνου 2010-11)

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> (35%)

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισίου. Επιπλέον, να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης θετικής ροπής.



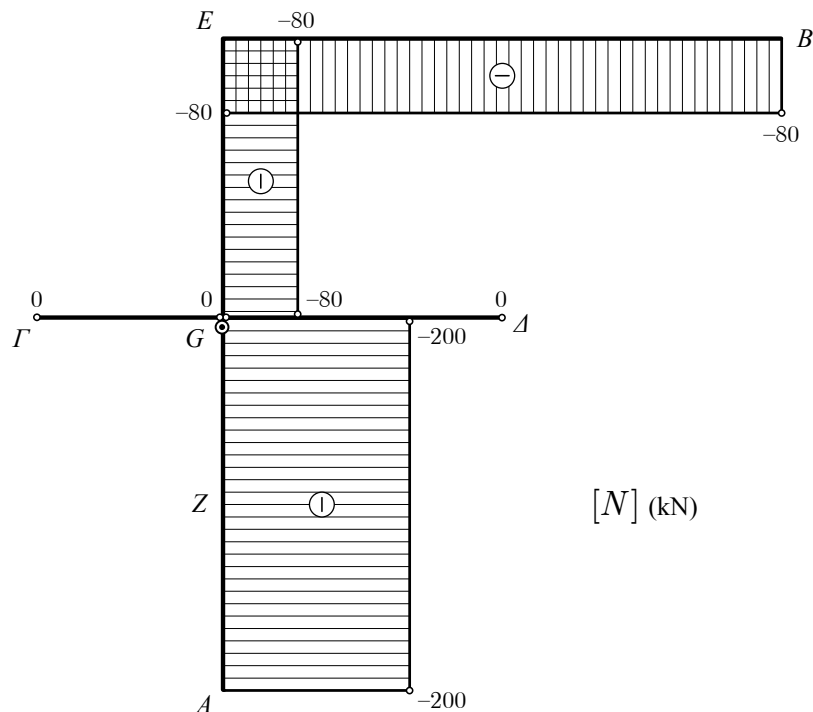
**Επίλυση:**Προσδιορισμός Αντιδράσεων:

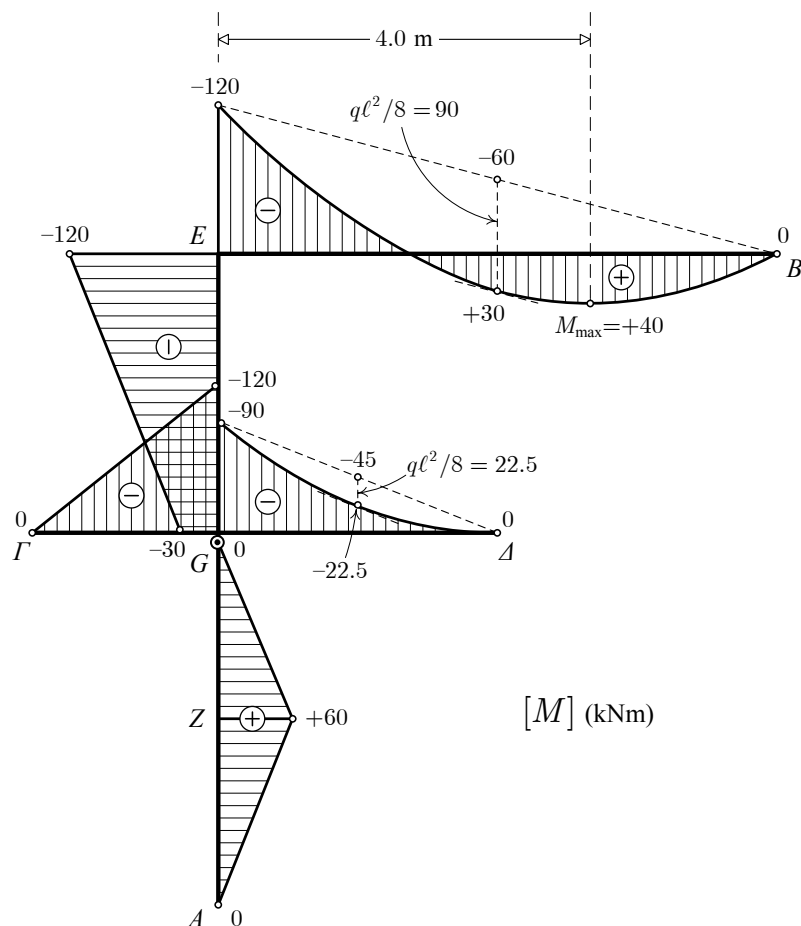
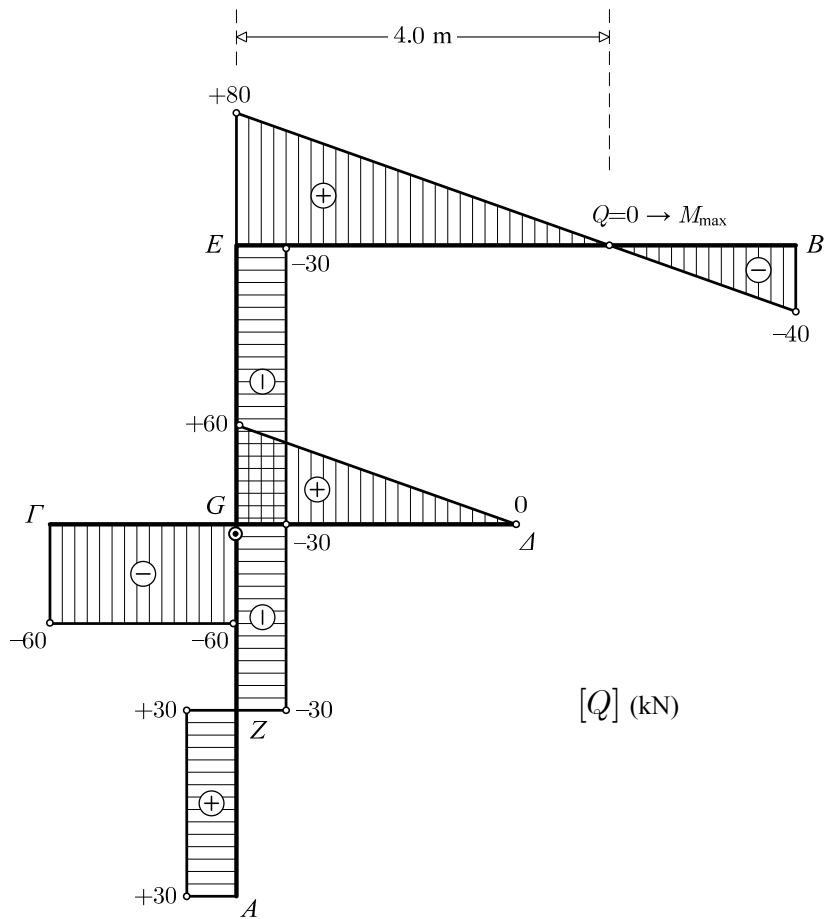
$$\curvearrowright \Sigma M_G^{\text{κάτω}} = 0 \Rightarrow 2 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} + 4 \text{ m} \cdot A_x = 0 \Rightarrow \underline{A_x = -30 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x + 50 \text{ kN} + 60 \text{ kN} = 0 \Rightarrow \underline{B_x = -80 \text{ kN}}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M_A = 0 &\Rightarrow -2 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} + 2 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} - (20 \text{ kN/m} \cdot 3 \text{ m}) \cdot 1.5 \text{ m} \\ &\quad - 7 \text{ m} \cdot 50 \text{ kN} - (20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 3 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot B_y - 7 \text{ m} \cdot B_x = 0 \\ &\Rightarrow -120 \text{ kNm} + 120 \text{ kNm} - 90 \text{ kNm} - 350 \text{ kNm} - 360 \text{ kNm} \\ &\quad + 6 \text{ m} \cdot B_y - 7 \text{ m} \cdot (-80 \text{ kN}) = 0 \\ &\Rightarrow 6 \text{ m} \cdot B_y + 560 \text{ kNm} = 800 \text{ kNm} \Rightarrow \underline{B_y = 40 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y - 60 \text{ kN} - 20 \text{ kN/m} \cdot 3 \text{ m} - 20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} = 0 \\ &\Rightarrow A_y + 40 \text{ kN} - 60 \text{ kN} - 60 \text{ kN} - 120 \text{ kN} = 0 \Rightarrow \underline{A_y = 200 \text{ kN}} \end{aligned}$$





Υπολογισμός Αξονικών Δυνάμεων:

από το  $A$  προς το  $G$  :  $N_A = -A_y = -200 \text{ kN}$ ,  $N_{G, \text{κάτω}} = -A_y = -200 \text{ kN}$

από το  $\Gamma$  προς το  $G$  :  $N_\Gamma = 0 \text{ kN}$ ,  $N_{G, \text{αριστερά}} = 0 \text{ kN}$

από το  $\Delta$  προς το  $G$  :  $N_\Delta = 0 \text{ kN}$ ,  $N_{G, \text{δεξιά}} = 0 \text{ kN}$

από το  $B$  προς το  $E$  :  $N_B = B_x = -80 \text{ kN}$ ,  $N_{E, \text{δεξιά}} = B_x = -80 \text{ kN}$

από το  $E$  προς το  $G$  :  $N_{E, \text{κάτω}} = -20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} + B_y = -120 \text{ kN} + 40 \text{ kN} = -80 \text{ kN}$   
(έγινε τομή λίγο κάτω από το σημείο  $E$  και εξετάσθηκε το τμήμα του φορέα πάνω από την τομή),

$$N_{G, \text{πάνω}} = -A_y + 60 \text{ kN} + 20 \text{ kN/m} \cdot 3 \text{ m} = -80 \text{ kN}$$

(έγινε τομή λίγο πάνω από το σημείο  $G$  και εναλλακτικά εξετάσθηκε το τμήμα του φορέα κάτω από την τομή)

Υπολογισμός Τεμνουσών Δυνάμεων:

από το  $A$  προς το  $Z$  :  $Q_A = -A_x = -(-30 \text{ kN}) = 30 \text{ kN}$ ,  $Q_{Z^-} = Q_A = +30 \text{ kN}$

από το  $Z$  προς το  $G$  :  $Q_{Z, \text{πάνω}} = -A_x - 60 \text{ kN} = -(-30 \text{ kN}) - 60 \text{ kN} = -30 \text{ kN}$ ,  
 $Q_{G, \text{κάτω}} = Q_{Z, \text{πάνω}} = -30 \text{ kN}$

από το  $\Gamma$  προς το  $G$  :  $Q_\Gamma = -60 \text{ kN}$ ,  $Q_{G, \text{αριστερά}} = Q_\Gamma = -60 \text{ kN}$

από το  $\Delta$  προς το  $G$  :  $Q_\Delta = 0 \text{ kN}$ ,  $Q_{G, \text{δεξιά}} = +20 \text{ kN/m} \cdot 3 \text{ m} = +60 \text{ kN}$

από το  $G$  προς το  $E$  :  $Q_{G, \text{πάνω}} = B_x + 50 \text{ kN} = -80 \text{ kN} + 50 \text{ kN} = -30 \text{ kN}$

(έγινε τομή λίγο πάνω από το σημείο  $G$  και εξετάσθηκε το τμήμα του φορέα πάνω από την τομή),

$$Q_{E, \text{κάτω}} = B_x + 50 \text{ kN} = Q_{G, \text{πάνω}} = -30 \text{ kN}$$

(έγινε τομή λίγο κάτω από το σημείο  $E$  και εξετάσθηκε το τμήμα του φορέα πάνω από την τομή)

$$Q_{E, \text{κάτω}} = -A_x - 60 \text{ kN} = +30 \text{ kN} - 60 \text{ kN} = -30 \text{ kN}$$

(ή εναλλακτικά γίνεται τομή λίγο κάτω από το σημείο  $E$  και εξετάζεται το τμήμα του φορέα κάτω από την τομή)

από το  $E$  προς το  $B$  :  $Q_{E, \text{δεξιά}} = (20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) - B_y = 120 \text{ kN} - 40 \text{ kN} = +80 \text{ kN}$

(έγινε τομή λίγο δεξιά από το σημείο  $E$  και εξετάσθηκε το τμήμα  $EB$  του φορέα, δεξιά της τομής),

Για την ίδια τομή, εάν εξετασθεί το τμήμα που βρίσκεται αριστερά και κάτω από την τομή, δηλαδή ο υπόλοιπος φορέας εκτός από την δοκό  $EB$ , θα είναι:  $Q_{E, δεξιά} = A_y - 60 \text{ kN} - (20 \text{ kN/m} \cdot 3 \text{ m}) \Rightarrow$   
 $Q_{E, δεξιά} = 200 \text{ kN} - 60 \text{ kN} - 60 \text{ kN} = +80 \text{ kN}$   
 $Q_{B, αριστ.} = Q_{E, δεξιά} - 20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} = 80 \text{ kN} - 120 \text{ kN} = -40 \text{ kN}$   
(ή εάν γίνει τομή λίγο αριστερά από το σημείο  $B$  και εξετασθεί το τμήμα δεξιά της τομής:  $Q_{B, αριστ.} = -B_y = -40 \text{ kN}$ )

### Υπολογισμός Καμπτικών Ροπών:

τομή στο  $Z$  και εξέταση του τμήματος κάτω από την τομή:

$$M_Z = -2 \text{ m} \cdot A_x = -2 \text{ m} \cdot (-30 \text{ kN}) = +60 \text{ kNm}$$

τομή κάτω από το  $G$  και εξέταση του τμήματος κάτω από την τομή:

$$\begin{aligned} M_{G, κάτω} &= -4 \text{ m} \cdot A_x - 2 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} \\ &= -4 \text{ m} \cdot (-30 \text{ kN}) - 120 \text{ kNm} = 0 \text{ kNm} \quad (\text{λόγω άρθρωσης στο } G) \end{aligned}$$

τομή αριστερά από το  $G$  και εξέταση του τμήματος αριστερά της τομής ( $IG$ ):

$$M_{G, αριστερά} = -2 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} = -120 \text{ kNm}$$

τομή δεξιά από το  $G$  και εξέταση του τμήματος δεξιά της τομής ( $GA$ ):

$$M_{G, δεξιά} = -(20 \text{ kN/m} \cdot 3 \text{ m}) \cdot 1.5 \text{ m} = -90 \text{ kNm}$$

τομή πάνω από το  $G$  και εξέταση του τμήματος πάνω από την τομή ( $GEB$ ):

$$\begin{aligned} M_{G, πάνω} &= -3 \text{ m} \cdot 50 \text{ kN} - (20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 3 \text{ m} - 3 \text{ m} \cdot B_x + 6 \text{ m} \cdot B_y \\ &= -150 \text{ kNm} - 360 \text{ kNm} - 3 \text{ m} \cdot (-80 \text{ kN}) + 6 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} \Rightarrow \\ M_{G, πάνω} &= -30 \text{ kNm} \end{aligned}$$

τομή κάτω από το  $E$  και εξέταση του τμήματος πάνω από την τομή ( $EB$ ):

$$\begin{aligned} M_{E, κάτω} &= -(20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 3 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot B_y \\ &= -360 \text{ kNm} + 6 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} = -120 \text{ kNm} \end{aligned}$$

τομή δεξιά του  $E$  και εξέταση του τμήματος δεξιά της τομής (όμοια με την προηγούμενη):

$$M_{E, δεξιά} = M_{E, κάτω} = -120 \text{ kNm}$$

### Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής

Η μέγιστη ροπή θα εμφανισθεί σε σημείο κάτω από το κατανεμημένο φορτίο όπου η τέμνουσα μηδενίζεται. Αυτό σύμφωνα με το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων θα συμβεί δεξιά του σημείου  $E$  σε απόσταση  $x$ , η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = \frac{80 \text{ kN}}{20 \text{ kN/m}} = 4.0 \text{ m}$$

Η δε τιμή της μέγιστης ροπής στο σημείο αυτό μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους:

(α) Γίνεται τομή στο σημείο αυτό και υπολογίζεται η ροπή από το δεξί τμήμα της τομής, που είναι προς το σημείο  $B$  και έχει μήκος  $6 \text{ m} - 4 \text{ m} = 2 \text{ m}$ :

$$M_{\max} = -(20 \text{ kN/m} \cdot 2 \text{ m}) \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} + 2 \text{ m} \cdot B = -40 \text{ kNm} + 2 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$\underline{M_{\max} = +40 \text{ kNm}}$$

(β) Η μέγιστη ροπή υπολογίζεται από το εμβαδόν του διαγράμματος της τέμνουσας:

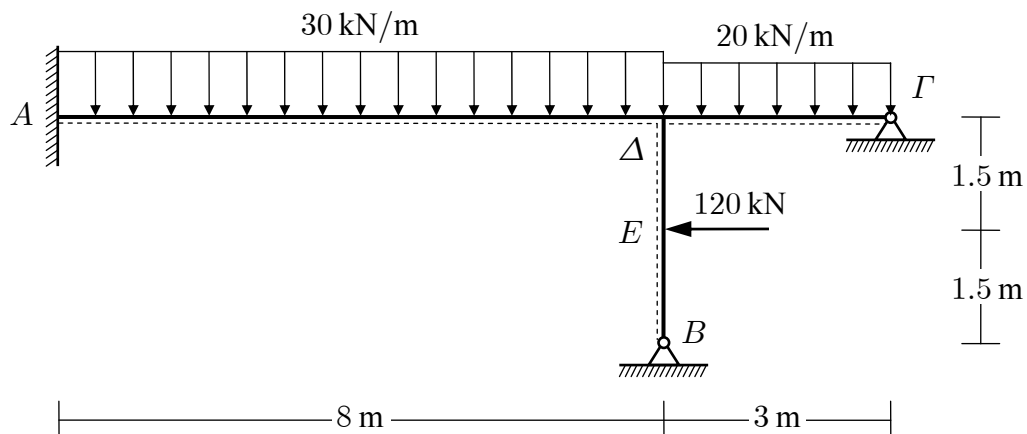
$$M_{\max} = M_E + \text{εμβαδόν } Q_{\text{από } E \text{ έως θέση } M_{\max}} = -120 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 4 \text{ m} \cdot 80 \text{ kN} \Rightarrow$$

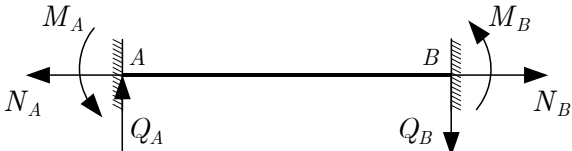
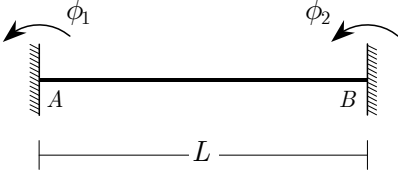
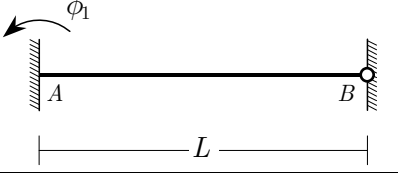
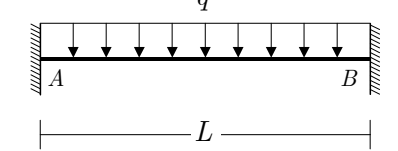
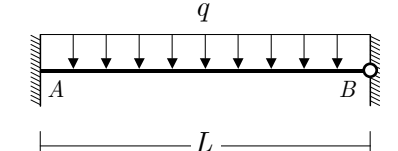
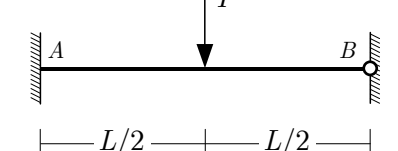
$$\underline{M_{\max} = +40 \text{ kNm}}$$

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (35%)

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος με τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

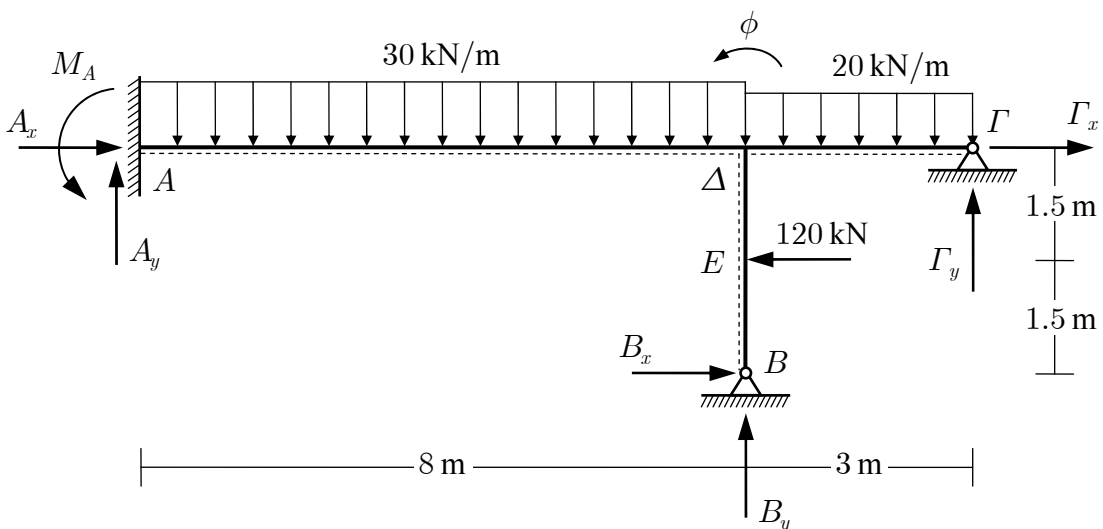
- Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία  $A$  και  $\Delta$  (αριστερά, δεξιά, κάτω).
- Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.

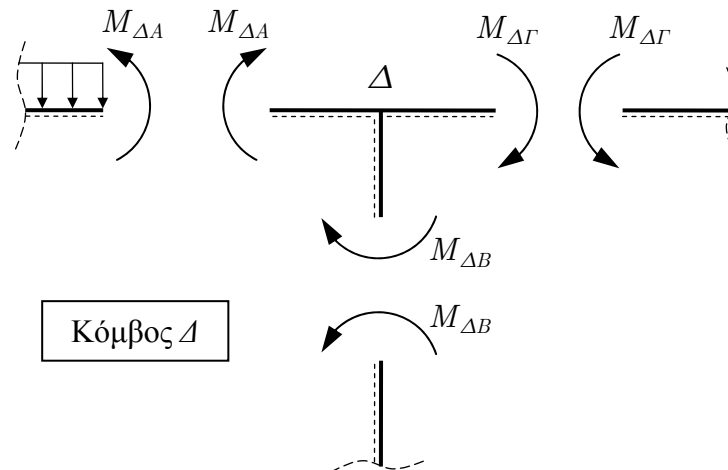


<p><b>ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΟΝΟΠΑΚΤΩΝ ΚΑΙ ΑΜΦΙΠΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ</b></p>	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{3EI}{L}\phi_1$ $Q_A = \frac{3EI}{L^2}\phi_1, \quad Q_B = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$
	$M_A = \frac{qL^2}{8}$ $Q_A = \frac{5qL}{8}, \quad Q_B = -\frac{3qL}{8}$
	$M_A = \frac{3PL}{16}$ $Q_A = \frac{11P}{16}, \quad Q_B = -\frac{5P}{16}$

**Επίλυση:**

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή  $\phi$  στο  $\Delta$ .





Δοκός ΑΔ:

$$M_{A\Delta} = \frac{2EI}{8}\phi + \frac{30 \cdot 8^2}{12} \Rightarrow M_{A\Delta} = \frac{EI\phi}{4} + 160$$

$$M_{\Delta A} = \frac{4EI}{8}\phi - \frac{30 \cdot 8^2}{12} \Rightarrow M_{\Delta A} = \frac{EI\phi}{2} - 160$$

$$Q_{A\Delta} = \frac{6EI}{8^2}\phi + \frac{30 \cdot 8}{2} \Rightarrow Q_{A\Delta} = \frac{3EI\phi}{32} + 120$$

$$Q_{\Delta A} = \frac{6EI}{8^2}\phi - \frac{30 \cdot 8}{2} \Rightarrow Q_{\Delta A} = \frac{3EI\phi}{32} - 120$$

Δοκός ΒΒ:

$$M_{\Delta B} = \frac{3EI}{3}\phi + \frac{3 \cdot 120 \cdot 3}{16} \Rightarrow M_{\Delta B} = EI\phi + 67.5$$

$$Q_{\Delta B} = \frac{3EI}{3^2}\phi + \frac{11 \cdot 120}{16} \Rightarrow Q_{\Delta B} = \frac{EI\phi}{3} + 82.5$$

$$Q_{B\Delta} = \frac{3EI}{3^2}\phi - \frac{5 \cdot 120}{16} \Rightarrow Q_{B\Delta} = \frac{EI\phi}{3} - 37.5$$

Δοκός ΓΓ:

$$M_{\Delta\Gamma} = \frac{3EI}{3}\phi + \frac{20 \cdot 3^2}{8} \Rightarrow M_{\Delta\Gamma} = EI\phi + 22.5$$

$$Q_{\Delta\Gamma} = \frac{3EI}{3^2}\phi + \frac{5 \cdot 20 \cdot 3}{8} \Rightarrow Q_{\Delta\Gamma} = \frac{EI\phi}{3} + 37.5$$

$$Q_{\Gamma\Delta} = \frac{3EI}{3^2}\phi - \frac{3 \cdot 20 \cdot 3}{8} \Rightarrow Q_{\Gamma\Delta} = \frac{EI\phi}{3} - 22.5$$



Ισοροπία ροπών κόμβου Δ:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{\Delta} = 0 &\Rightarrow M_{\Delta A} + M_{\Delta B} + M_{\Delta \Gamma} = 0 \\ &\Rightarrow \left( \frac{EI\phi}{2} - 160 \right) + (EI\phi + 67.5) + (EI\phi + 22.5) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{5EI\phi}{2} - 70 = 0 \Rightarrow \boxed{EI\phi = 28}\end{aligned}$$

Κόμβος Α:

$$M_{A\Delta} = \frac{EI\phi}{4} + 160 \Rightarrow M_{A\Delta} = \frac{28}{4} + 160 \Rightarrow \boxed{M_{A\Delta} = 167 \text{ kNm}}$$

$$Q_{A\Delta} = \frac{3 \cdot EI\phi}{32} + 120 = \frac{3 \cdot 28}{32} + 120 \Rightarrow \boxed{Q_{A\Delta} = 122.625 \text{ kN}}$$

$$A_y = Q_{A\Delta} = 122.625 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{A_y = 122.625 \text{ kN}}$$

Κόμβος Δ:

$$M_{\Delta A} = \frac{EI\phi}{2} - 160 \Rightarrow M_{\Delta A} = \frac{28}{2} - 160 \Rightarrow \boxed{M_{\Delta A} = -146 \text{ kNm}}$$

$$M_{\Delta B} = EI\phi + 67.5 \Rightarrow M_{\Delta B} = 28 + 67.5 \Rightarrow \boxed{M_{\Delta B} = 95.5 \text{ kNm}}$$

$$M_{\Delta \Gamma} = EI\phi + 22.5 \Rightarrow M_{\Delta \Gamma} = 28 + 22.5 \Rightarrow \boxed{M_{\Delta \Gamma} = 50.5 \text{ kNm}}$$

$$Q_{\Delta \Gamma} = \frac{3EI}{3^2} \phi + \frac{5 \cdot 20 \cdot 3}{8} \Rightarrow Q_{\Delta \Gamma} = \frac{28}{3} + 37.5 \Rightarrow \boxed{Q_{\Delta \Gamma} = 46.83 \text{ kN}}$$

Κόμβος Β:

$$Q_{B\Delta} = \frac{EI\phi}{3} - 37.5 = \frac{28}{3} - 37.5 \Rightarrow \boxed{Q_{B\Delta} = -28.167 \text{ kN}}$$

$$B_x = -Q_{B\Delta} = -(-28.167 \text{ kN}) \Rightarrow \boxed{B_x = 28.167 \text{ kN}}$$

Κόμβος Γ:

$$Q_{\Gamma\Delta} = \frac{EI\phi}{3} - 22.5 = \frac{28}{3} - 22.5 \Rightarrow \boxed{Q_{\Gamma\Delta} = -13.167 \text{ kN}}$$

$$G_y = -Q_{\Gamma\Delta} = 13.167 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{G_y = 13.167 \text{ kN}}$$

Καμπτικές Ροπές:

Υπολογίζονται οι τιμές της καμπτικής ροπής σε χαρακτηριστικά σημεία του πλαισίου προκειμένου να σχεδιασθεί το διάγραμμα καμπτικών ροπών του φορέα. Σημειώνεται ότι

για όλες τις ροπές το πρόσημο προσδιορίζεται από τον εφελκυσμό ή θλίψη της ίνας αναφοράς στο υπό εξέταση τμήμα του φορέα.

$$M_A = -M_{A\Delta} = -167 \text{ kNm}$$

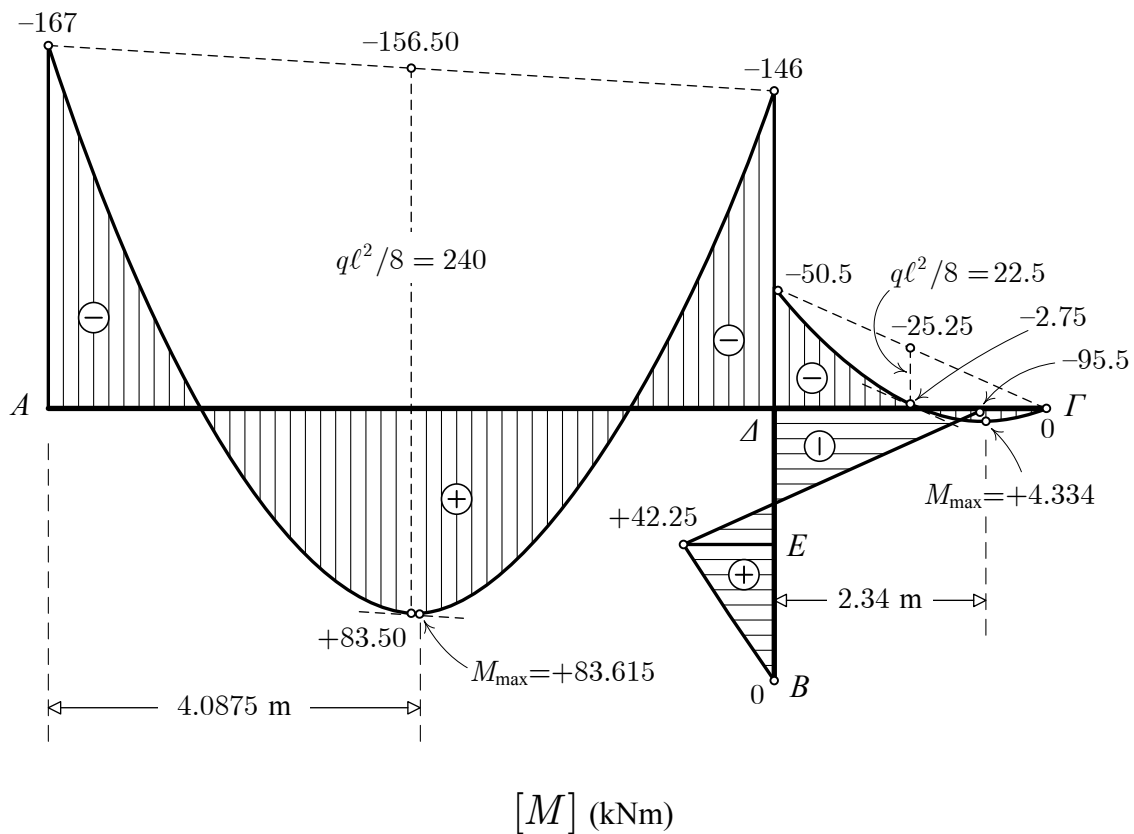
$$M_{\Delta, \text{αριστερά}} = M_{\Delta A} = -146 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta, \text{κάτω}} = -M_{\Delta B} = -95.5 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta, \text{δεξιά}} = -M_{\Delta\Gamma} = -50.5 \text{ kNm}$$

$$M_E = 1.5 \text{ m} \cdot B_x = 1.5 \text{ m} \cdot 28.167 \text{ kN} = 42.25 \text{ kNm}$$

### Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών:



### Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής

Η πρώτη μέγιστη θετική ροπή θα εμφανισθεί δεξιά της πάκτωσης  $A$  σε εκείνο το σημείο κάτω από το κατανεμημένο φορτίο των  $30 \text{ kN/m}$  όπου η τέμνουσα μηδενίζεται. Η απόστασή του  $x$  από το  $A$  δίνεται από τη σχέση:

$$x = \frac{A_y}{30 \text{ kN/m}} = \frac{122.625 \text{ kN}}{30 \text{ kN/m}} = 4.0875 \text{ m}$$

Η μέγιστη ροπή στο διάστημα  $AD$  μπορεί να υπολογισθεί μέσω του εμβαδού του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων:

$$M_{\max} = M_A + \text{εμβαδόν } Q \left( \text{από } A \text{ έως θέση } M_{\max} \right) = M_A + \frac{1}{2} x \cdot A_y \Rightarrow$$

$$M_{\max} = -167 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 4.0875 \text{ m} \cdot 122.625 \text{ kN} \Rightarrow \underline{M_{\max} = 83.615 \text{ kNm}}$$

Η δεύτερη μέγιστη θετική ροπή θα εμφανισθεί δεξιά του κόμβου  $D$  στο σημείο κάτω από το καταναμημένο φορτίο των  $20 \text{ kN/m}$  όπου η τέμνουσα μηδενίζεται. Η απόσταση  $x$  του σημείου αυτού από το  $D$  θα είναι:

$$x = \frac{Q_{DG}}{20 \text{ kN/m}} = \frac{46.83 \text{ kN}}{20 \text{ kN/m}} = 2.3417 \text{ m}$$

Η μέγιστη ροπή στο διάστημα  $DG$  μπορεί να υπολογισθεί από το εμβαδό του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων:

$$M_{\max} = M_{DG} + \text{εμβαδόν } Q \left( \text{από } D \text{ έως θέση } M_{\max} \right) = M_{DG} + \frac{1}{2} x \cdot Q_{DG} \Rightarrow$$

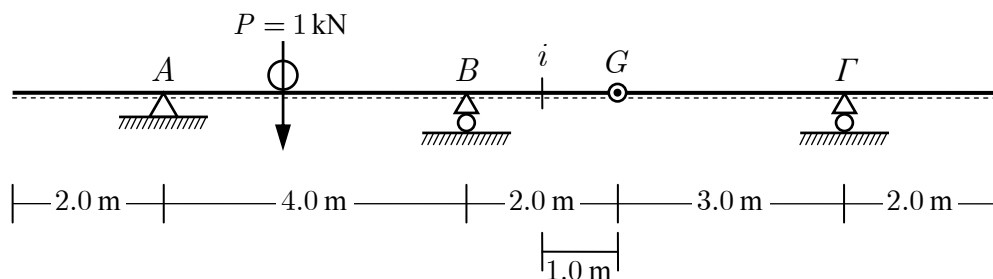
$$M_{\max} = -50.5 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 2.3417 \text{ m} \cdot 46.83 \text{ kN} \Rightarrow \underline{M_{\max} = 4.334 \text{ kNm}}$$

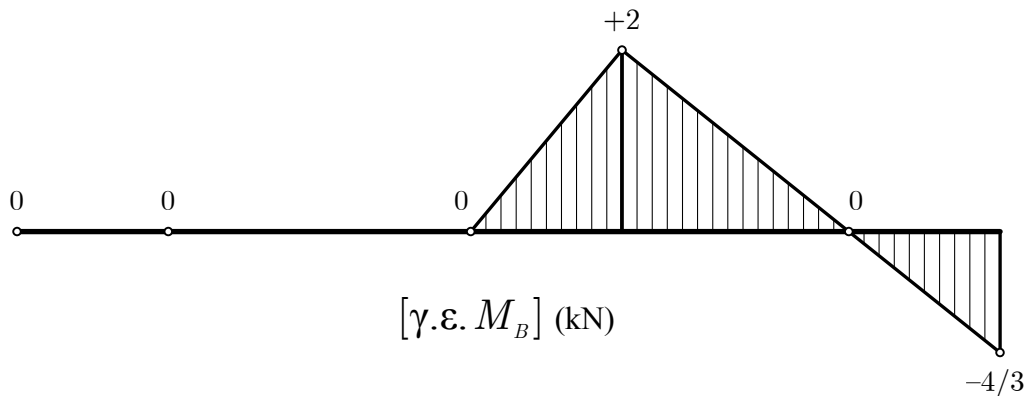
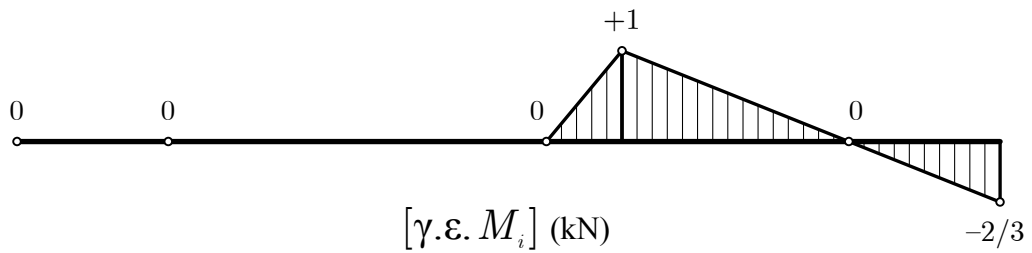
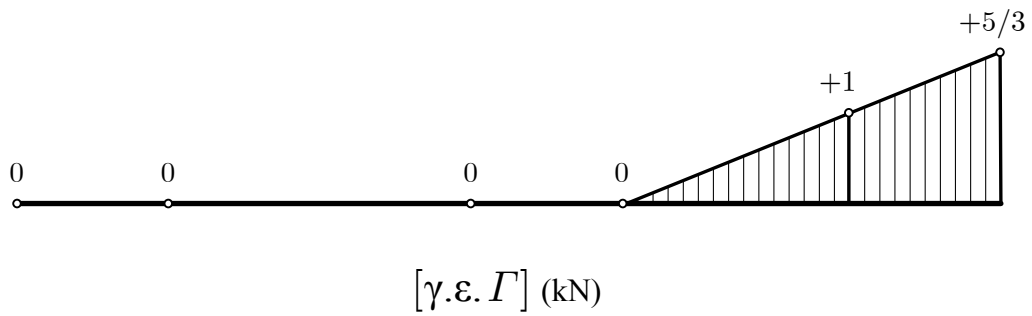
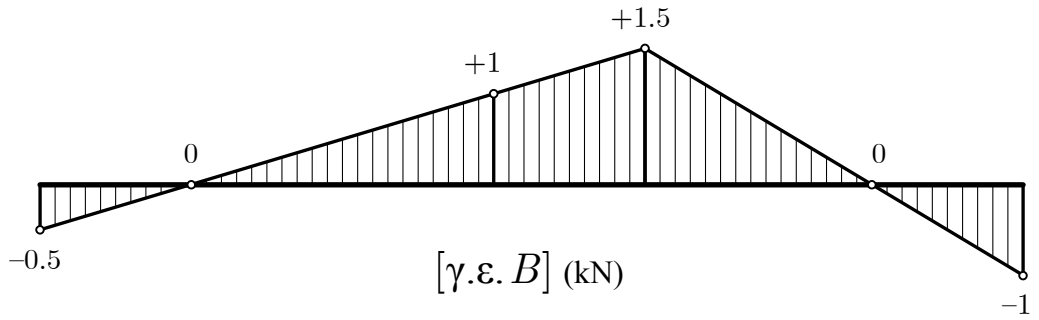
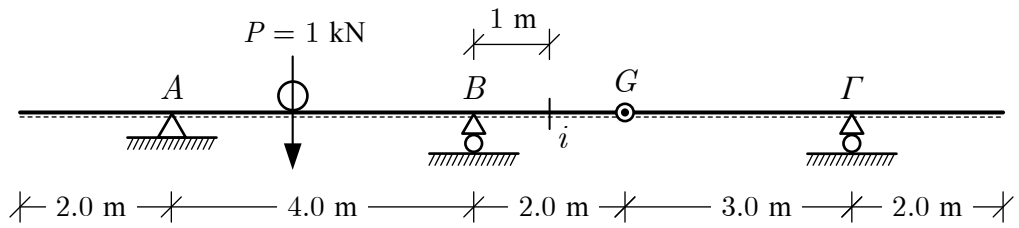
*(επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)*

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (30%) (Α' επιλογή)

Για τη συνεχή δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής:

- (α) των αντιδράσεων στις στηρίξεις  $B$  και  $\Gamma$ ,
- (β) της καμπτικής ροπής  $M_i$  στη τομή  $i$  και
- (γ) της καμπτικής ροπής  $M_B$  στη στήριξη  $B$ .



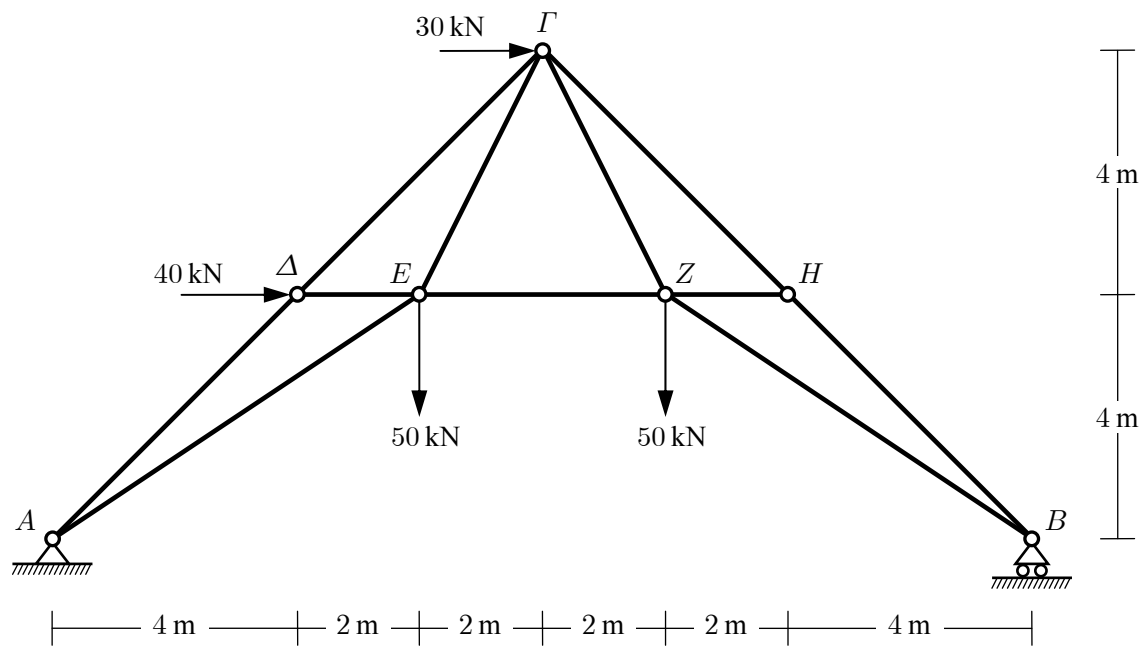


**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (30%) (B' επιλογή)

Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- (α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών και μόνο εξισώσεις ροπών να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη  $\Gamma\Delta$  και  $ZE$ .
- (β) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις των ράβδων που συντρέχουν στους κόμβους  $B$  και  $H$  (δηλ.  $BZ$ ,  $BH$ ,  $ZH$  και  $H\Gamma$ ).

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.

**Επίλυση:**

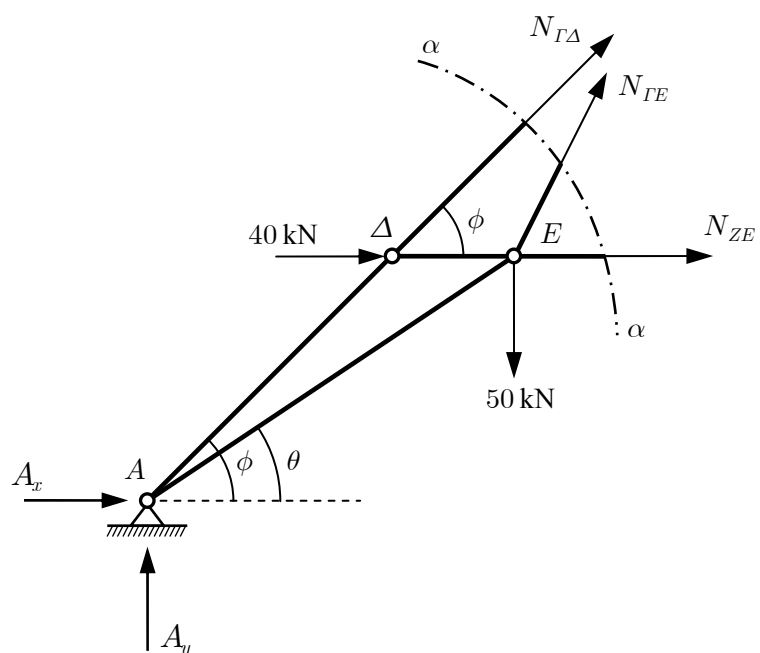
Οι άγνωστες αξονικές δυνάμεις θα προσδιορισθούν κάνοντας τομή  $\alpha-\alpha$  η οποία τέμνει τα ζητούμενα μέλη.

Η γωνία  $\phi$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\phi = \tan^{-1}(4/4) = 45^\circ$$

Η γωνία  $\theta$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta = \tan^{-1}(4/6) = 33.69^\circ$$



Αντιδράσεις στην άρθρωση A και κύλιση B:

$$\curvearrowright \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -16 \cdot A_y - 4 \cdot 40 - 8 \cdot 30 + 10 \cdot 50 + 6 \cdot 50 = 0$$

$$\Rightarrow -16 \cdot A_y - 160 - 240 + 500 + 300 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 25 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + 40 + 30 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = -70 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 50 - 50 = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 75 \text{ kN}}$$

Μέθοδος των τομών: Τομή α-α (αριστερό τμήμα)

Δύναμη στο μέλος ΓΔ:

$$\curvearrowright \Sigma M_E = 0 \Rightarrow 4 \cdot A_x - 6 \cdot A_y - 2 \cdot N_{\Gamma\Delta} \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (-70) - 6 \cdot 25 - 2 \cdot N_{\Gamma\Delta} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -430 - N_{\Gamma\Delta} \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_{\Gamma\Delta} = -215\sqrt{2} \text{ kN} = -304.06 \text{ kN}}$$

(θλίψη)

Δύναμη στο μέλος ZE:

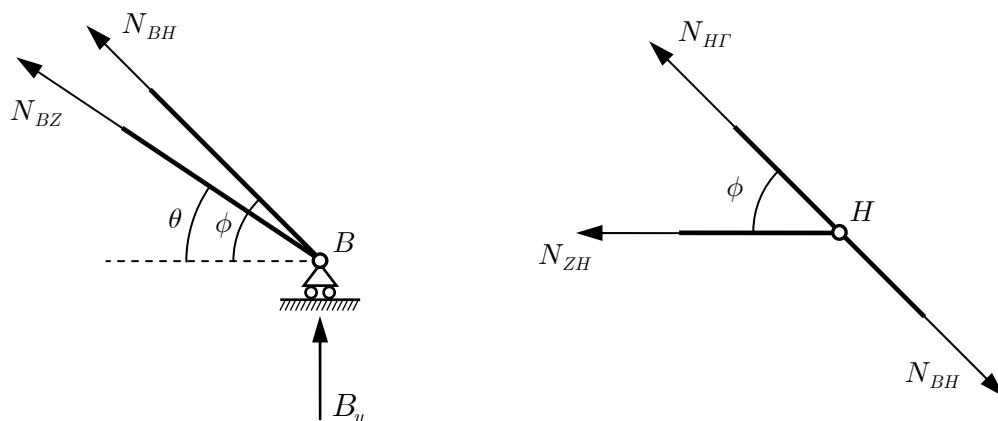
$$\curvearrowright \Sigma M_G = 0 \Rightarrow 4 \cdot N_{ZE} + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 50 + 8 \cdot A_x - 8 \cdot A_y = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot N_{ZE} + 160 + 100 + 8 \cdot (-70) - 8 \cdot 25 = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot N_{ZE} + 160 + 100 - 560 - 200 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{ZE} = 125 \text{ kN}}$$

(εφελκυσμός)

Μέθοδος των κόμβων:



Δυνάμεις στο κόμβο B:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -N_{BH} \cos \phi - N_{BZ} \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow -N_{BH} \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{BZ} \cos \theta = 0 \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_{BH} \sin \phi + N_{BZ} \sin \theta + B_y = 0 \quad \Rightarrow N_{BH} \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{BZ} \sin \theta + B_y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_{BH} &= -N_{BZ} \sqrt{2} \cos \theta \\ -N_{BZ} \cos \theta + N_{BZ} \sin \theta + B_y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} N_{BH} &= -N_{BZ} \sqrt{2} \cos \theta \\ N_{BZ} &= \frac{B_y}{\cos \theta - \sin \theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_{BH} &= -N_{BZ} \sqrt{2} \cos \theta \\ N_{BZ} &= \frac{75 \text{ kN}}{\cos 33.69^\circ - \sin 33.69^\circ} = 270.42 \text{ kN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{BH} = -270.42 \text{ kN} \sqrt{2} \cos 33.69^\circ$$

$$\boxed{N_{BZ} = 270.42 \text{ kN}} \text{ (εφελκυσμός)} \quad \text{και} \quad \boxed{N_{BH} = -318.20 \text{ kN}} \text{ (θλίψη)}$$

Δυνάμεις στο κόμβο H:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -N_{HG} \cos \phi + N_{BH} \cos \phi - N_{ZH} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_{HG} \sin \phi - N_{BH} \sin \phi = 0 \quad \Rightarrow N_{HG} = N_{BH} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -N_{BH} \cos \phi + N_{BH} \cos \phi - N_{ZH} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_{HG} = N_{BH} = -318.20 \text{ kN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} N_{ZH} &= 0 \\ N_{HG} &= -318.20 \text{ kN} \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{N_{ZH} = 0 \text{ kN}} \quad \text{και} \quad \boxed{N_{HG} = -318.20 \text{ kN}} \text{ (θλίψη)}$$